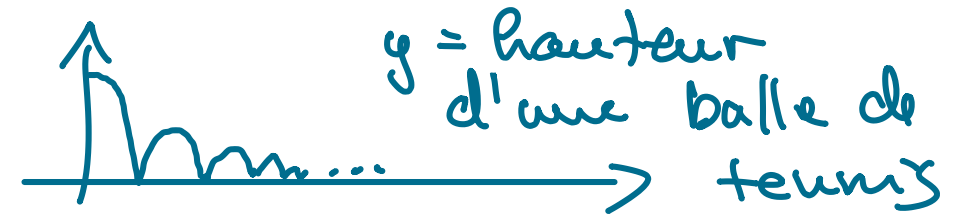


Retour sur les exos: Pourquoi le domaine de nos solutions est toujours une intervalle ouvert?

Ex 7(ii) $y:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ def. par $y(x) = \sqrt{2x+2}$

why? $\rightarrow$ simplification!



Rappel: EDO d'ordre 1 linéaire: $y' + p(x)y = q(x)$ $\rightarrow y' + p(x)y = 0$

Étape 1: Var exp. sur l'équation homogène: $y_h(x) = K e^{-\int p(x) dx}$

Étape 2: Variation de la constante: $y_p(x) = K(x) e^{-\int p(x) dx}$

$\rightarrow$ on injecte dans $y' + p(x)y = q(x)$ & on trouve $K(x)$ par intégration directe

Exemple 1.19:

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + xy = 4x\sqrt{1+x^2} \\ y(0) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Étape 1: $y_h(x) = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}$

Étape 2: $y_p(x) = \frac{K(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

Pour que y_p soit solution, on a besoin que

$$\frac{4x}{\sqrt{1+x^2}} = \underbrace{y_p'(x)} + \frac{x}{1+x^2} \underbrace{y_p(x)} = \underbrace{K'(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - K(x) \cdot \frac{1}{2} \frac{2x}{(1+x^2)^{3/2}}}_{+ \frac{x}{1+x^2} \frac{K(x)}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$= K'(x) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \cancel{K(x) \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}} + \cancel{K(x) \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}} = K'(x) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow 4x = K'(x) \Rightarrow 2x^2 + C = K(x)$$

$\Rightarrow$ La solution générale est $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie

par $y(x) = (2x^2 + C) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$

$$C \in \mathbb{R}$$

Étape 3 : condition initiale

$$14 = y(0) = \frac{2 \cdot 0^2}{\sqrt{1+0^2}} + \frac{C}{\sqrt{1+0^2}} = C \Rightarrow C = 14$$

$\Rightarrow y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par
 $y(x) = \frac{2x^2 + 14}{\sqrt{1+x^2}}$ est la solution maximale
du problème de Cauchy.

Remarque 1.20 (sur la constante d'intégration dans
la variation de la constante)

Dans l'exemple ci-dessus dans le passage
 $4x = K'(x) \Rightarrow K(x) = 2x^2 + C$, le $+C$ n'est
pas nécessaire. On peut choisir la constante
qu'on veut (par ex: $C=0$) puis on récupère la
solution générale en ajoutant $y_h(x) = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$, pour

recupérer la solution générale. Néanmoins, garder le "+ C" fera que y est directement la solution générale.

Méthode 1.21 (Facteur intégrant)

Soit $y' + p(x)y = q(x)$ une EDO linéaire d'ordre 1.

supposons que $p \in C^0(I)$. Soit donc $P(x)$ une primitive de $p(x)$.

Remarquons que si on amplifie l'équation par $e^{P(x)}$, on obtient

$$e^{P(x)} y' + \boxed{p(x)e^{P(x)}} y = q(x)e^{P(x)}$$

$$\left(e^{P(x)} \right)'$$

$$\Rightarrow e^{P(x)} y' + (e^{P(x)})' y = q(x) e^{P(x)}$$

$$\Rightarrow (e^{P(x)} y)' = q(x) e^{P(x)}$$

$$\Rightarrow e^{P(x)} y = \int^x q(t) e^{P(t)} dt + C$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-P(x)} \int^x q(t) e^{P(t)} dt + C e^{-P(x)}$$

Exemple 1.23

Comme avant,

$$\begin{cases} (1+x^2) y' + x y = 4x \sqrt{1+x^2} \\ y(0) = 14 \end{cases}$$

$$(1+x^2) y' + x y = 4x \sqrt{1+x^2} \Rightarrow y' + \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{P(x)} y = \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$P(x) = \int^x P(t) dt = \frac{1}{2} \log(1+x^2) = \log(\sqrt{1+x^2})$$

$$e^{P(x)} = e^{\log(\sqrt{1+x^2})} = \sqrt{1+x^2}$$

$$\bullet \sqrt{1+x^2} \Rightarrow \sqrt{1+x^2} y' + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} y = 4x$$

$$\Rightarrow (\sqrt{1+x^2} y)' = 4x \Rightarrow \sqrt{1+x^2} y = 2x^2 + C$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{2x^2 + C}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\Rightarrow$ La solution générale est $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ déf. par

$$y(x) = \frac{2x^2 + C}{\sqrt{1+x^2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Étape 2: même chose que l'étape 3 de l'exemple 1.19.

Définition 1.24

Soit $y' + p(x)y = q(x)$ une EDO linéaire d'ordre 1.

on dit que l'EDO est à coefficient constant si $p(x)$ est constant, i.e. $\exists a \in \mathbb{R}$ tq $\forall x, p(x) = a$.

Exemple 1.25

Soit l'EDO d'ordre 1 linéaire à coeffs constants:

$$y' + 2y = 2x^2 - 2x + 4$$

$$\hookrightarrow y' + 2y = 0$$

Étape 1: solution de l'équation homogène par variation de la constante:

On trouve $y_h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y_h(x) = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Étape 2 On cherche que la solution particulière
a la forme $y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

On a $y_p'(x) = 2\alpha x + \beta$, on doit avoir

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x + 4 &= y_p'(x) + 2y_p(x) = 2\alpha x + \beta + 2\alpha x^2 + 2\beta x + 2\gamma \\ &= 2\alpha x^2 + (2\alpha + 2\beta)x + \beta + 2\gamma. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 2 \\ 2\alpha + 2\beta = -2 \\ \beta + 2\gamma = 4 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 3$$

$\Rightarrow y_p(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow$ Sol gén: $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par
 $x^2 - 2x + 3 + Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Méthode 1.26 (séparation des variables sur l'équation homogène + coefficients indéterminés (cas où q ne ressemble pas à y_h))

Soit $y' + ay = q(x)$ une EDO linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Supposons que $q(x)$ a une des formes suivantes

$$q(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \dots + \xi_n x^n \quad (\xi_i \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

$$q(x) = \xi_0 \sin(\mu x) + \xi_1 \cdot x \cdot \sin(\mu x) + \dots + \xi_n x^n \sin(\mu x) \\ + \eta_0 \cos(\mu x) + \eta_1 x \cdot \cos(\mu x) + \dots + \eta_n x^n \cos(\mu x) \quad (\xi_i, \eta_i, \mu \in \mathbb{R})$$

$$q(x) = \xi_0 e^{\lambda x} + \xi_1 x e^{\lambda x} + \dots + \xi_n x^n e^{\lambda x} \quad (\xi_i, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -a)$$

$$q(x) = \xi_0 \sin(\mu x) e^{\lambda x} + \xi_1 x \sin(\mu x) e^{\lambda x} + \dots + \xi_n x^n \sin(\mu x) e^{\lambda x} \\ + \eta_0 \cos(\mu x) e^{\lambda x} + \eta_1 x \cos(\mu x) e^{\lambda x} + \dots + \eta_n x^n \cos(\mu x) e^{\lambda x} \quad \begin{matrix} (\xi_i, \eta_i, \\ \mu, \lambda \\ \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Étape 1: On trouve la solution générale de l'équation homogène

$$y_h(x) = Ce^{-ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Étape 2: On trouve une solution particulière à l'aide la méthode des coefficients indéterminés, i.e. on cherche y_p qui a la même forme que $q(x)$.

Exemple 1.27: (i) $y' + 2y = 8x \cos(2x)$

Étape 1: $y_h(x) = Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}$

Étape 2: $q(x)$ ressemble à la 2^{ème} ligne :

$$q(x) = \xi_0 \cdot \sin(\mu \cdot x) + \xi_1 \cdot x \cdot \sin(\mu \cdot x) + \eta_0 \cdot \cos(\mu \cdot x) + \eta_1 \cdot x \cdot \cos(\mu \cdot x)$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \eta_0 = 0, \eta_1 = 8, \quad \mu = 2.$$

On cherche $y_p(x)$ de la forme

$$y_p(x) = \alpha_0 \sin(2x) + \alpha_1 \cdot x \cdot \sin(2x) + \beta_0 \cos(2x) + \beta_1 \cdot x \cdot \cos(2x)$$

On a :

$$y_p'(x) = (\alpha_1 - 2\beta_0) \sin(2x) + (-2\beta_1) x \sin(2x) + (2\alpha_0 + \beta_1) \cos(2x) + 2\alpha_1 \cdot x \cdot \cos(2x).$$

$$\Rightarrow 8x \cos(2x) = y_p' + 2y_p = 0$$

erreur dans le cos.

$$= (2\alpha_0 + \alpha_1 - 2\beta_0) \sin(2x) + (2\alpha_1 - 2\beta_1) \cdot x \sin(2x) + (2\beta_0 + 2\alpha_0 + \beta_1) \cos(2x) + (2\beta_1 + 2\alpha_1) x \cos(2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_0 + \alpha_1 - 2\beta_0 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\beta_1 = 0 \\ 2\beta_0 + 2\alpha_0 + \beta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\& \quad 2\beta_1 + 2\alpha_1 = 8$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = -1, \alpha_1 = 2, \beta_0 = 0, \beta_1 = 2$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -\sin(2x) + 2x \sin(2x) + 2x \cos(2x)$$

Avec méthode standard: $\int x \cdot \cos(2x) e^{-2x} dx$

(ii) Soit l'EDO $y' + 2y = 4x^2 e^{2x} + 2x e^{2x} - 4e^{2x}$

Étape 1 $y_h = C e^{-2x} \quad C \in \mathbb{R}.$

Étape 2: $\varphi(x) = \xi_0 e^{\lambda x} + \xi_1 x e^{\lambda x} + \xi_2 x^2 e^{\lambda x},$

$$\xi_0 = -4, \xi_1 = 2, \xi_2 = 4, \lambda = 2.$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \alpha_0 e^{2x} + \alpha_1 x e^{2x} + \alpha_2 x^2 e^{2x}.$$

Où $y_p'(x) = (2\alpha_0 + \alpha_1)e^{2x} + (2\alpha_1 + 2\alpha_2)xe^{2x} + 2\alpha_2x^2e^{2x}$

$$\Rightarrow q(x) = 4x^2e^{2x} + 2xe^{2x} - 4e^{2x} = y_p'(x) + 2y_p(x)$$

$$= (4\alpha_0 + \alpha_1)e^{2x} + (4\alpha_1 + 2\alpha_2)xe^{2x} + 4\alpha_2x^2e^{2x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\alpha_0 + \alpha_1 = -4 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \\ 4\alpha_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \alpha_0 = -1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$$

$$\Rightarrow y_p(x) = x^2e^{2x} - e^{2x}$$

$\Rightarrow$ la solution générale est $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = x^2e^{2x} - e^{2x} + Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(iii) Soit l'EDO $y' + 2y = e^{-2x}$

Étape 1 $y_h(x) = Ce^{-2x}$

Étape 2 : $q(x) = \xi_0 e^{-2x}$,

On pose $y_p(x) = \alpha_0 e^{-2x}$.

On a besoin que

$$q(x) = e^{-2x} = y_p'(x) + 2y_p(x) = -2\alpha_0 e^{-2x} + 2\alpha_0 e^{-2x} = 0$$